

УДК 517.984

Теоремы о представлении и вариационные принципы для самосопряжённых операторных матриц

А. А. Владимиров

§ 1. Введение

1. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть дано некоторое гильбертово пространство \mathfrak{H} , разложенное в ортогональную прямую сумму $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ двух своих замкнутых подпространств. Пусть при этом дополнительно фиксированы четыре оператора $T_{11}^\circ: \text{dom } T_{11}^\circ \rightarrow \mathfrak{H}_1$, $T_{12}^\circ: \text{dom } T_{22}^\circ \rightarrow \mathfrak{H}_1$, $T_{21}^\circ: \text{dom } T_{11}^\circ \rightarrow \mathfrak{H}_2$ и $T_{22}^\circ: \text{dom } T_{22}^\circ \rightarrow \mathfrak{H}_2$, задающие симметрическую операторную матрицу

$$(1) \quad T^\circ = \begin{pmatrix} T_{11}^\circ & T_{12}^\circ \\ T_{21}^\circ & T_{22}^\circ \end{pmatrix}$$

с областью определения $\text{dom } T_{11}^\circ \oplus \text{dom } T_{22}^\circ$. Наконец, пусть симметрический оператор T_{11}° ограничен снизу, а симметрический оператор T_{22}° — сверху.

В работе [1] для трёх различных типов взаимных соотношений между операторами T_{11}° , T_{22}° и T_{21}° была развита вариационная техника, позволяющая исследовать свойства некоторых частей дискретного спектра замыкания оператора T° . Основной целью настоящей статьи является указание ряда общих фактов, частными случаями которых выступают результаты работы [1], а также некоторые аналогичные им.

2. Основу предлагаемого нами подхода составляет теория *оснащённых пространств* (см., например, [2, Глава 1, п. 2.4] или [3, Добавление 1, §§ 2.3]). В настоящей статье под оснащённым пространством будет пониматься совокупность $\mathbf{A} \equiv \{\mathfrak{B}, \mathfrak{D}^+, \mathfrak{D}^-, I^+, I^-\}$ из трёх банаховых пространств \mathfrak{B} , \mathfrak{D}^+ и \mathfrak{D}^- и двух инъективных вложений $I^+: \mathfrak{D}^+ \rightarrow \mathfrak{B}$ и $I^-: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}^-$ с плотными образами:

$$\mathfrak{D}^+ \xrightarrow{I^+} \mathfrak{B} \xrightarrow{I^-} \mathfrak{D}^-.$$

Операторами в оснащении \mathbf{A} мы далее будем сокращённо называть ограниченные операторы, отображающие пространство \mathfrak{D}^+ в пространство \mathfrak{D}^- . Класс операторов в оснащении \mathbf{A} мы будем обозначать символом $\mathcal{B}(\mathbf{A})$.

3. Структура статьи имеет следующий вид. В § 2 устанавливаются используемые далее теоремы о представлении замкнутого неограниченного оператора в банаховом пространстве линейным пучком ограниченных операторов в оснащении. Эти теоремы содержат как простые частные случаи классические результаты о представлении секториального оператора полуторалинейной формой [4, Гл. VI, § 2]. В § 3 вводится процедура *углового расширения* симметрической операторной матрицы, опирающаяся

на результаты § 2 и тесно связанная со стандартной процедурой расширения (и псевдорасширения) оператора по Фридрихсу. В § 4 на основе вариационных принципов для самосопряжённых оператор-функций устанавливаются вариационные принципы для угловых расширений. Наконец, в § 5 обсуждаются некоторые дополнительные применения результатов из § 2.

§ 2. Теоремы о представлении

1. Пусть зафиксированы некоторое оснащение $\mathbf{A} \Rightarrow \{\mathfrak{B}, \mathfrak{D}^+, \mathfrak{D}^-, I^+, I^-\}$ и связанный с ним оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$. Символом T^\bullet мы далее будем обозначать оператор $(I^-)^{-1}T(I^+)^{-1}$, действующий в пространстве \mathfrak{B} и, вообще говоря, неограниченный.

1.1. Пусть при некотором $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{B})$ оператор $T - I^-AI^+$ обладает ограниченным обратным. Тогда оператор T^\bullet замкнут и плотно определён.

Доказательство. Легко видеть справедливость равенства

$$(1) \quad T^\bullet - A = (I^-)^{-1} \cdot (T - I^-AI^+) (I^+)^{-1}.$$

Соответственно, оператор $T^\bullet - A$ является обратным к всюду определённому ограниченному оператору $I^+ \cdot (T - I^-AI^+)^{-1}I^-$, а потому замкнут. Этот факт автоматически означает замкнутость оператора T^\bullet .

Далее, область определения оператора T^\bullet совпадает с областью определения оператора $T^\bullet - A$, а потому и с областью значений оператора $I^+ \cdot (T - I^-AI^+)^{-1}I^-$. Ввиду предполагаемой плотности образов операторов I^\pm это означает плотность подмножества $\text{dom } T^\bullet$ в пространстве \mathfrak{B} . \square

1.2. Всякое значение $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого оператор $T - \lambda I^-I^+$ обладает ограниченным обратным, принадлежит резольвентному множеству оператора T^\bullet и удовлетворяет равенству

$$(T^\bullet - \lambda)^{-1} = I^+ \cdot (T - \lambda I^-I^+)^{-1}I^-.$$

Справедливость данного предложения, по существу, установлена в ходе доказательства предложения 1.1.

1.3. Пусть при некотором $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{B})$ оператор $T - I^-AI^+$ обладает ограниченным обратным. Тогда для любого $\lambda \in \rho(T^\bullet)$ оператор $T - \lambda I^-I^+$ также обладает ограниченным обратным.

Доказательство. Введём сокращения $T^\natural(\lambda) \Leftarrow T - \lambda I^-I^+$, $T^\natural(A) \Leftarrow T - I^-AI^+$, $R_\lambda \Leftarrow (T^\bullet - \lambda)^{-1}$ и $R_A \Leftarrow (T^\bullet - A)^{-1}$, а также обозначим через $S: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}^+$ ограниченный оператор

$$(2) \quad S \Leftarrow [T^\natural(A)]^{-1}I^- \cdot [1 + (\lambda - A)R_\lambda].$$

Заметим, что имеют место равенства

$$(3) \quad \begin{aligned} R_\lambda - R_A &= R_A \cdot [(T^\bullet - A) - (T^\bullet - \lambda)]R_\lambda \\ &= R_A \cdot (\lambda - A)R_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^\natural(\lambda)S &= [I^- - I^-(\lambda - A)R_A] \cdot [1 + (\lambda - A)R_\lambda] & [(2), (1)] \\
&= I^- \cdot [1 + (\lambda - A)(R_\lambda - R_A) - (\lambda - A)R_A \cdot (\lambda - A)R_\lambda] \\
(4) \quad &= I^-. & [(3)]
\end{aligned}$$

Соответственно, равенства

$$\begin{aligned}
T^\natural(\lambda) \cdot [1 + S(\lambda - A)I^+][T^\natural(A)]^{-1} &= T^\natural(A) \cdot [T^\natural(A)]^{-1} & [(4)] \\
&= 1
\end{aligned}$$

означают существование у оператора $T^\natural(\lambda)$ ограниченного правого обратного. Вытекающая из ограниченной обратимости оператора $T^\bullet - \lambda$ инъективность оператора $T^\natural(\lambda)$ означает потому ограниченную обратимость последнего. \square

Сказанное означает, что если хотя бы для одного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{B})$ оператор $T - I^-AI^+$ обладает ограниченным обратным, то спектр оператора T^\bullet в точности совпадает со спектром линейного пучка $T^\natural: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{A})$ вида $T^\natural(\lambda) \rightleftharpoons T - \lambda I^-I^+$. При этом также справедливо следующее предложение.

1.4. Независимо от выбора значения $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$\ker(T^\bullet - \lambda) = I^+ \ker T^\natural(\lambda).$$

Доказательство. Любой вектор $x \in \ker(T^\bullet - \lambda)$ допускает представление в виде $x = I^+y$, где вектор $y \in \mathfrak{D}^+$ удовлетворяет равенству $(I^-)^{-1}T^\natural(\lambda)y = 0$. Соответственно, имеет место вложение

$$\ker(T^\bullet - \lambda) \subseteq I^+ \ker T^\natural(\lambda).$$

С другой стороны, для любого вектора $y \in \ker T^\natural(\lambda)$ выполняется равенство $Ty = I^-(\lambda I^+y)$, означающее принадлежность вектора $x \rightleftharpoons I^+y$ области определения оператора T^\bullet , а тогда и ядру оператора $T^\bullet - \lambda$. \square

2. Рассмотрим в качестве примера оснащение

$$\mathbf{A}_0 \rightleftharpoons \{L_2[0, 1], \tilde{W}_2^1[0, 1], L_2[0, 1], I, \text{id}\}.$$

Здесь использовано обозначение

$$(1) \quad \tilde{W}_2^1[0, 1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^1[0, 1] : y(0) = y(1)\},$$

через $I: \tilde{W}_2^1[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ обозначен оператор вложения, а через id — тождественный оператор в пространстве $L_2[0, 1]$. Свяжем с этим оснащением оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_0)$ вида $Ty \rightleftharpoons -iy'$. Тогда оператор $T - I$ обладает обратным интегральным оператором с ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{ie^{i(x-t)}}{1 - e^i} & \text{при } x \geq t, \\ \frac{-ie^{i(x-t)}}{1 - e^{-i}} & \text{при } x \leq t, \end{cases}$$

что, согласно предложениям 1.1 и 1.3, означает замкнутость и плотную определённость оператора T^\bullet , а также совпадение его спектра со спектром пучка T^\natural .

Следующие примеры показывают, что условия из предложений 1.1 и 1.3 носят содержательный характер.

Рассмотрим оснащение

$$\mathbf{A}_1 \Rightarrow \{L_2[0, 1], \tilde{W}_2^1[0, 1], \tilde{W}_2^{-1}[0, 1], I, I^*\},$$

где через $\tilde{W}_2^{-1}[0, 1]$ обозначено пространство, сопряжённое пространству $\tilde{W}_2^1[0, 1]$. В этом случае оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_1)$ вида $Ty \Rightarrow -iy'$ вполне непрерывен, что, ввиду полной непрерывности вложения I , означает отсутствие для оператора $T - I^*AI$ ограниченного обратного независимо от выбора оператора $A \in \mathcal{B}(L_2[0, 1])$. Оператор T^\bullet имеет тот же вид, что и в рассмотренном выше случае оснащения \mathbf{A}_0 , однако спектром пучка T^\natural в рассматриваемой ситуации выступает вся плоскость $\mathbb{C} \neq \sigma(T^\bullet)$.

Рассмотрим оснащение

$$\mathbf{A}_2 \Rightarrow \{L_2[0, 1], \tilde{W}_2^2[0, 1], L_2[0, 1], J, \text{id}\},$$

где использовано обозначение

$$\tilde{W}_2^2[0, 1] \Rightarrow \{y \in W_2^2[0, 1] : y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)\},$$

а через $J: \tilde{W}_2^2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ обозначен оператор вложения. В этом случае оператор T^\bullet не является замкнутым.

Наконец, рассмотрим оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_1)$ вида

$$Ty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y(\zeta_n) \delta_{\zeta_n},$$

где $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольно фиксированная плотная на отрезке $[0, 1]$ последовательность, а через $\delta_\zeta \in \tilde{W}_2^{-1}[0, 1]$ обозначена дельта-функция с сосредоточенным в точке $\zeta \in [0, 1]$ носителем. В этом случае область определения оператора T^\bullet содержит лишь нулевой вектор пространства $L_2[0, 1]$.

§ 3. Угловые расширения

1. Классическая процедура расширения полуограниченного самосопряжённого оператора по Фридрихсу на языке теории оснащённых пространств выглядит следующим образом. Пусть T° — действующий в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} симметрический оператор (вообще говоря, неограниченный), и пусть число $\gamma \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$(\forall y \in \text{dom } T^\circ) \quad \langle (T^\circ - \gamma)y, y \rangle_{\mathfrak{H}} \geq \|y\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Обозначим через \mathfrak{D} пополнение линейного множества $\text{dom } T^\circ$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}} \Rightarrow \langle (T^\circ - \gamma)y, y \rangle_{\mathfrak{H}}^{1/2},$$

а через $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{H}$ — соответствующий оператор вложения. Наконец, обозначим через \mathfrak{D}^* сопряжённое к \mathfrak{D} пространство, после чего рассмотрим оснащение $\mathbf{A} \rightleftharpoons \{\mathfrak{H}, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*, I, I^*\}$. Тривиальное тождество

$$(1) \quad (\forall y \in I^{-1} \operatorname{dom} T^\circ) \quad \langle [I^* T^\circ I - \gamma I^* I] y, y \rangle_{\mathfrak{H}} = \|y\|_{\mathfrak{D}}^2$$

означает, что оператор $I^* T^\circ I$ допускает однозначное продолжение по непрерывности до некоторого оператора $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$. Далее следует воспользоваться следующей теоремой.

1.1. [4, Гл. V, Следствие 3.3] Пусть \mathfrak{D} — гильбертово пространство, и пусть числовая область значений

$$W(A) \rightleftharpoons \{\lambda \in \mathbb{C} : (\exists y \in \mathfrak{D} : \|y\|_{\mathfrak{D}} = 1) \quad \langle Ay, y \rangle = \lambda\}$$

ограниченного оператора $A: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}^*$ отделена от нуля. Тогда оператор A обладает ограниченным обратным.

С учётом этой теоремы, оператор $T^\natural(\gamma)$ ограниченно обратим [(1)]. Соответственно [§ 2.1.2, § 2.1.3], оператор $T^\bullet \rightleftharpoons (I^*)^{-1} T I^{-1}$, очевидным образом расширяющий оператор T° , является самосопряжённым.

Целью настоящего параграфа является разработка аналогичного метода построения самосопряжённых расширений для симметрических операторных матриц описанного в § 1.1 вида.

2. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ задана симметрическая операторная матрица § 1.1 (1) с указанными в § 1.1 свойствами. Зафиксируем два значения $\varkappa, \tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} (\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^\circ) \quad & \langle (T_{11}^\circ - \varkappa)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1} \geq \|y\|_{\mathfrak{H}_1}^2, \\ (\forall y \in \operatorname{dom} T_{22}^\circ) \quad & \langle (\tau - T_{22}^\circ)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2} \geq \|y\|_{\mathfrak{H}_2}^2. \end{aligned}$$

Обозначим через \mathfrak{D}_2 пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T_{22}^\circ$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_2} \rightleftharpoons \langle (\tau - T_{22}^\circ)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2},$$

через T_{22}^\bullet — связанное с пространством \mathfrak{D}_2 фридрихсовское расширение оператора T_{22}° , а через \mathfrak{D}_1 — пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T_{11}^\circ$ по норме

$$(1) \quad \|y\|_{\mathfrak{D}_1} \rightleftharpoons [\langle (T_{11}^\circ - \varkappa)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1} + \langle (\tau - T_{22}^\bullet)^{-1} T_{21}^\circ y, T_{21}^\circ y \rangle_{\mathfrak{H}_2}]^{1/2}.$$

По построению, при этом существуют обладающие плотными образами непрерывные операторы вложения $I_1: \mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1$ и $I_2: \mathfrak{D}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2$. Это позволяет ввести в рассмотрение оснащение $\mathbf{A} \rightleftharpoons \{\mathfrak{H}, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*, I, I^*\}$, где положено $\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$ и $I \rightleftharpoons I_1 \oplus I_2$, а через \mathfrak{D}^* обозначено пространство, сопряжённое пространству \mathfrak{D} .

Заметим, что при любом выборе вектора $y \in \mathfrak{D}_1$, удовлетворяющего дополнительному условию $I_1 y \in \operatorname{dom} T_{11}^\circ$, выполняются соотношения

$$\|I_1^* (T_{11}^\circ - \varkappa) I_1 y\|_{\mathfrak{D}_1^*} = \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_1} = 1} |\langle (T_{11}^\circ - \varkappa) I_1 y, I_1 z \rangle_{\mathfrak{H}_1}|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1 \\ I_1 z \in \text{dom } T_{11}^\circ}} \langle (T_{11}^\circ - \varkappa) I_1 y, I_1 y \rangle_{\mathfrak{H}_1}^{1/2} \cdot \langle (T_{11}^\circ - \varkappa) I_1 z, I_1 z \rangle_{\mathfrak{H}_1}^{1/2} \\
&\leq \|y\|_{\mathfrak{D}_1}, \\
\|I_2^* T_{21}^\circ I_1 y\|_{\mathfrak{D}_2^*} &= \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1} |\langle T_{21}^\circ I_1 y, I_2 z \rangle_{\mathfrak{H}_2}| \\
&= \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1} |\langle (\tau - T_{22}^\bullet)^{-1/2} T_{21}^\circ I_1 y, (\tau - T_{22}^\bullet)^{1/2} I_2 z \rangle_{\mathfrak{H}_2}| \\
&\leq \|(\tau - T_{22}^\bullet)^{-1/2} T_{21}^\circ I_1 y\|_{\mathfrak{H}_2} \cdot \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1} \|(\tau - T_{22}^\bullet)^{1/2} I_2 z\|_{\mathfrak{H}_2} \\
&\leq \|y\|_{\mathfrak{D}_1}.
\end{aligned}$$

Соответственно, замыканиями операторов $I_1^* T_{11}^\circ I_1$ и $I_2^* T_{21}^\circ I_1$ являются некоторые всюду определённые ограниченные операторы $T_{11}: \mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{D}_1^*$ и $T_{21}: \mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{D}_2^*$.

Аналогичным образом, при любом выборе вектора $y \in \mathfrak{D}_2$, удовлетворяющего дополнительному условию $I_2 y \in \text{dom } T_{22}^\circ$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\|I_2^* (T_{22}^\circ - \tau) I_2 y\|_{\mathfrak{D}_2^*} &= \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1} |\langle (\tau - T_{22}^\circ) I_2 y, I_2 z \rangle_{\mathfrak{H}_2}| \\
&\leq \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1 \\ I_2 z \in \text{dom } T_{22}^\circ}} \langle (\tau - T_{22}^\circ) I_2 y, I_2 y \rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2} \cdot \langle (\tau - T_{22}^\circ) I_2 z, I_2 z \rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2} \\
&= \|y\|_{\mathfrak{D}_2}, \\
\|I_1^* T_{12}^\circ I_2 y\|_{\mathfrak{D}_1^*} &= \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1 \\ I_1 z \in \text{dom } T_{11}^\circ}} |\langle I_2 y, T_{21}^\circ I_1 z \rangle_{\mathfrak{H}_2}| \\
&= \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1 \\ I_1 z \in \text{dom } T_{11}^\circ}} |\langle (\tau - T_{22}^\bullet)^{1/2} I_2 y, (\tau - T_{22}^\bullet)^{-1/2} T_{21}^\circ I_1 z \rangle_{\mathfrak{H}_2}| \\
&\leq \|(\tau - T_{22}^\bullet)^{1/2} I_2 y\|_{\mathfrak{H}_2} \cdot \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1 \\ I_1 z \in \text{dom } T_{11}^\circ}} \|(\tau - T_{22}^\bullet)^{-1/2} T_{21}^\circ I_1 z\|_{\mathfrak{H}_2} \\
&\leq \|y\|_{\mathfrak{D}_2}.
\end{aligned}$$

Соответственно, замыканиями операторов $I_2^* T_{22}^\circ I_2$ и $I_1^* T_{12}^\circ I_2$ являются некоторые всюду определённые ограниченные операторы $T_{22}: \mathfrak{D}_2 \rightarrow \mathfrak{D}_2^*$ и $T_{12}: \mathfrak{D}_2 \rightarrow \mathfrak{D}_1^*$.

Объединяя установленные факты, убеждаемся, что замыканием оператора $I^* T^\circ I$ является некоторый всюду определённый ограниченный оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$. Отвечающий ему оператор $T^\bullet \Leftarrow (I^*)^{-1} T I^{-1}$ мы далее будем называть *угловым расширением* исходной операторной матрицы T° .

2.1. Угловое расширение T^\bullet операторной матрицы T° представляет собой самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} .

Доказательство. Вещественнозначность квадратичной формы оператора T^\bullet немедленно вытекает из его определения. Соответственно, для доказательства предложения достаточно [4, Гл. V, Теорема 4.3] установить ограниченную обратимость оператора

$$T^\bullet - \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} = (I^*)^{-1} \begin{pmatrix} T_{11} - \varkappa I_1^* I_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \tau I_2^* I_2 \end{pmatrix} I^{-1}.$$

Последняя, в свою очередь, немедленно вытекает из ограниченной обратимости оператора

$$(2) \quad \begin{pmatrix} T_{11} - \varkappa I_1^* I_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \tau I_2^* I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{12} D_\tau^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{\varkappa, \tau} & 0 \\ 0 & D_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_\tau^{-1} T_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

где положено $D_\tau \rightleftharpoons T_{22} - \tau I_2^* I_2$ и $S_{\varkappa, \tau} \rightleftharpoons T_{11} - \varkappa I_1^* I_1 - T_{12} D_\tau^{-1} T_{21}$: действительно, числовые области значений операторов D_τ и $S_{\varkappa, \tau}$ отделены от нуля, что означает [1.1] ограниченную обратимость этих операторов. \square

В ходе доказательства предложения 2.1 нами, по существу, была также установлена справедливость следующего предложения.

2.2. Любое значение $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит спектру оператора T^\bullet в том и только том случае, когда оно принадлежит спектру линейного пучка $T^\natural: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{A})$ вида

$$T^\natural(\lambda) = T - \lambda I^* I.$$

При этом кратность любого собственного значения $\lambda \in \mathbb{R}$ оператора T^\bullet в точности совпадает с размерностью ядра оператора $T^\natural(\lambda)$ [§ 2.1.2, § 2.1.3, § 2.1.4].

3. Связь разработанной выше в настоящем параграфе конструкции с результатами работы [1] даётся следующим легко проверяемым предложением.

3.1. Пусть матрица T° самосопряжена в существенном, операторы T_{11}° и T_{22}° полуограничены (соответственно, снизу и сверху), а также выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1°. Оператор T_{22}° самосопряжён в существенном, причём для некоторых $\gamma, \varkappa \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$(\forall y \in \text{dom } T_{11}^\circ) \quad \|T_{21}^\circ y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leq \gamma \cdot \langle (T_{11}^\circ - \varkappa)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1}.$$

2°. Для некоторых $\gamma, \varkappa, \tau \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\forall y \in \text{dom } T_{11}^\circ) \quad & \|T_{21}^\circ y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leq \gamma \cdot \langle (T_{11}^\circ - \varkappa)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1}, \\ (\forall y \in \text{dom } T_{22}^\circ) \quad & \|T_{12}^\circ y\|_{\mathfrak{H}_2}^2 \leq \gamma \cdot \langle (\tau - T_{22}^\circ)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2}. \end{aligned}$$

3°. Операторы T_{11}° и T_{22}° являются ограниченными.

Тогда замыкание оператора T° является его угловым расширением.

Фигурирующие в формулировке предложения 3.1 три случая взаимных соотношений между элементами операторной матрицы T° суть в точности три типа взаимного доминирования этих элементов, рассмотренные в работе [1].

4. В качестве простого примера применения процедуры углового расширения рассмотрим действующую в пространстве $L_2[0, 1] \oplus L_2[0, 1]$ симметрическую операторную матрицу

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -d^2/dx^2 & -d^2/dx^2 \\ -d^2/dx^2 & 0 \end{pmatrix}$$

с областью определения $\mathring{W}_2^2[0, 1] \oplus \mathring{W}_2^2[0, 1]$. Этой матрице отвечают пространства $\mathfrak{D}_1 = \mathring{W}_2^2[0, 1]$ и $\mathfrak{D}_2 = L_2[0, 1]$ (с некоторыми эквивалентными стандартным нормами), а само расширение задаётся той же матрицей с областью определения $\mathring{W}_2^2[0, 1] \oplus W_2^2[0, 1]$. При этом операторы $T_{22} - \lambda I_2^* I_2$ представляют собой действующие в $L_2[0, 1]$ операторы умножения на постоянную λ , что означает в случае $\lambda \neq 0$ равносильность ограниченной обратимости оператора $T^\natural(\lambda) = T - \lambda I^* I$ и передаточного оператора

$$S(\lambda) \rightleftharpoons T_{11} - \lambda I_1^* I_1 + \lambda^{-1} T_{12} T_{21}: \mathring{W}_2^2[0, 1] \rightarrow \mathring{W}_2^{-2}[0, 1].$$

Последний, в свою очередь, имеет вид

$$\langle S(\lambda)y, z \rangle \equiv \int_0^1 [y' \overline{z'} - \lambda y \overline{z} + \lambda^{-1} y'' \overline{z''}] dx,$$

что означает равносильность его ограниченной обратимости отсутствию нетривиальных решений граничной задачи

$$\begin{aligned} y^{(4)} - \lambda y'' - \lambda^2 y &= 0, \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Согласно предложению 2.2, спектр последней граничной задачи в точности совпадает на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ со спектром определённой на $\mathring{W}_2^2[0, 1] \oplus W_2^2[0, 1]$ операторной матрицы (1).

Отметим, что матрица (1) не относится ни к одному из трёх типов, рассмотренных в работе [1] и указанных в формулировке предложения 3.1.

§ 4. Вариационные принципы

1. Предложение § 3.2.2 сводит вопрос о спектре углового расширения T^\bullet операторной матрицы T° к вопросу о спектре линейного пучка T^\natural ограниченных операторов вида

$$(1) \quad T^\natural(\lambda) = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda I_1^* I_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda I_2^* I_2 \end{pmatrix}.$$

В случае, когда значение $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит резольвентному множеству оператора T_{22}^\bullet , оператор $T_{22}^\natural(\lambda) = T_{22} - \lambda I_2^* I_2$ обладает ограниченным обратным [§ 2.1.3], что означает возможность факторизации операторной матрицы (1) в виде § 3.2 (2). Соответственно, вне спектра оператора T_{22}^\bullet собственные значения оператора T^\bullet совпадают — с сохранением кратностей — с собственными значениями оператор-функции S вида

$$S(\lambda) \rightleftharpoons T_{11} - \lambda I_1^* I_1 - T_{12} [T_{22}^\natural(\lambda)]^{-1} T_{21}.$$

Настоящий параграф будет посвящён описанию основанных на таком замечании вариационных принципов для собственных значений оператора T^\bullet .

2. Далее через $\text{ind } A$ всегда обозначается отрицательный индекс инерции квадратичной формы оператора A , т. е. точная верхняя грань размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \text{dom } A$, удовлетворяющих условию

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall y \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}) \quad \langle Ay, y \rangle < 0.$$

Имеет место следующий факт.

2.1. Пусть отрезок $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^\bullet)$ таков, что оператор $S(\zeta^+): \mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{D}_1^*$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда спектр оператора T^\bullet на полуинтервале $[\zeta^-, \zeta^+)$ чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине $\text{ind } S(\zeta^+) - \text{ind } S(\zeta^-)$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, представляющее собой нижнюю оценку некоторого вполне непрерывного возмущения оператора $S(\zeta^+)$. Ввиду справедливости для любых чисел $\lambda_1 \in [\zeta^-, \zeta^+)$, $\lambda_2 \in (\lambda_1, \zeta^+]$ и вектора $y \in \mathfrak{D}_1$ соотношений

$$\begin{aligned} \langle [S(\lambda_2) - S(\lambda_1)]y, y \rangle &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\langle S(\lambda)y, y \rangle}{d\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(-\|I_1 y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 - \|I_2 [T_{22}^\natural(\lambda)]^{-1} T_{21} y\|_{\mathfrak{H}_2}^2 \right) d\lambda \\ (1) \quad &\leq -(\lambda_2 - \lambda_1) \|I_1 y\|_{\mathfrak{H}_1}^2, \end{aligned}$$

постоянная ε будет минорировать некоторое вполне непрерывное возмущение оператора $S(\lambda)$ при любом выборе значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$. Положим теперь

$$\Lambda_n(\lambda) \rightleftharpoons \inf_{\substack{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}_1 \\ \dim \mathfrak{M} > n}} \sup_{\substack{y \in \mathfrak{M} \\ \|y\|_{\mathfrak{D}_1} = 1}} \inf \left\{ \langle S(\lambda)y, y \rangle, \varepsilon \right\}.$$

Непрерывный и монотонный характер зависимости операторов $S(\lambda)$ от параметра гарантирует непрерывность и невозрастание каждой из функций $\Lambda_n: [\zeta^-, \zeta^+] \rightarrow \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Стандартные вариационные принципы для ограниченных самосопряжённых операторов [5, п. 82, Теорема 2] утверждают, что независимо от выбора значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ размерность подпространства $\ker S(\lambda)$ равна величине

$$\#\{n \in \mathbb{N} : \Lambda_n(\lambda) = 0\},$$

причём в случае обращения этой размерности в нуль оператор $S(\lambda)$ обладает ограниченным обратным. Кроме того, из оценок (1) вытекает факт отрицательной определённости квадратичной формы оператора $S(\lambda_2)$ на любом подпространстве, на котором неположительна квадратичная форма оператора $S(\lambda_1)$. Тем самым, каждая из функций Λ_n строго убывает в своих нулях. Соответственно, пересечение спектра оператора T^\bullet с полуинтервалом $[\zeta^-, \zeta^+)$ представляет собой [§ 3.2.2] дискретное множество всевозможных нулей функций Λ_n , причём суммарная кратность этой части спектра оператора T^\bullet совпадает с величиной

$$(2) \quad \#\{n \in \mathbb{N} : (\Lambda_n(\zeta^-) \geq 0) \ \& \ (\Lambda_n(\zeta^+) < 0)\} = \text{ind } S(\zeta^+) - \text{ind } S(\zeta^-).$$

Тем самым, доказываемое предложение является верным. \square

Проведённые при доказательстве предложения 2.1 рассуждения в основном воспроизводят доказательство теоремы [6, Теорема 2]. Аналогичным образом доказывается также следующее предложение.

2.2. Пусть отрезок $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^\bullet)$ таков, что оператор $S(\zeta^-): \mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{D}_1^*$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора. Тогда спектр оператора T^\bullet на полуинтервале $(\zeta^-, \zeta^+]$ чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине $\text{ind}[-S(\zeta^-)] - \text{ind}[-S(\zeta^+)]$.

3. Имеют место следующие четыре факта.

3.1. Пусть $\zeta \in \varrho(T_{22}^\bullet)$ — имеющее конечную кратность изолированное собственное значение оператора T^\bullet . Пусть также для некоторого $\zeta^- < \zeta$ справедливо соотношение $[\zeta^-, \zeta] \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T_{22}^\bullet)$, причём оператор $S(\zeta^-)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда найдётся такое $\zeta^+ > \zeta$, что справедливо соотношение $(\zeta, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T_{22}^\bullet)$, а оператор $S(\zeta^+)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора.

Доказательство. В рассматриваемом случае найдётся [7, п. 21.4] самосопряжённый оператор конечного ранга $K: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, для которого оператор $T^\bullet + K - \zeta$ будет ограниченно обратимым. Без умаления общности рассмотрения можно считать оператор K настолько малым по норме, что оператор

$$\tilde{D}_\zeta \doteq T_{22} + I_2^*(K_{22} - \zeta)I_2$$

обладает ограниченным обратным. В этом случае определённая на некотором содержащем точку ζ интервале $\Gamma \subseteq (\zeta^-, +\infty)$ оператор-функция \tilde{S} вида

$$\tilde{S}(\lambda) \doteq T_{11} + I_1^*(K_{11} - \lambda)I_1 - (T_{12} + I_1^*K_{12}I_2) \tilde{D}_\lambda^{-1} \cdot (T_{21} + I_2^*K_{21}I_1)$$

принимает при $\lambda = \zeta$ ограниченно обратимое значение [§ 3.2.2].

Ввиду непрерывности функции \tilde{S} в смысле равномерной операторной топологии, найдётся содержащий точку ζ интервал $\Delta \subseteq \Gamma$ со следующими свойствами:

- 1°. При любом выборе значения $\lambda \in \Delta$ оператор $\tilde{S}(\lambda)$ обладает ограниченным обратным.
- 2°. Операторы $\theta(\tilde{S}(\lambda))$, где через θ обозначена функция Хэвисайда, непрерывно зависят от параметра $\lambda \in \Delta$ в смысле равномерной операторной топологии.

Зафиксируем теперь произвольное расположенное слева от точки ζ значение $\mu \in \Delta$. Оператор $\tilde{S}(\mu)$ представляет собой имеющее конечный ранг возмущение оператора $S(\mu)$, по условию являющегося вполне непрерывным возмущением некоторого равномерно положительного оператора. Соответственно, оператор $\tilde{S}(\mu)$ сам является вполне непрерывным возмущением некоторого равномерно положительного оператора, и потому оператор $\theta(\tilde{S}(\mu))$ представляет собой проектор на подпространство конечной коразмерности. Согласно вышесказанному, проекторами на некоторые подпространства той же конечной коразмерности [5, п. 39] будут выступать также операторы $\theta(\tilde{S}(\lambda))$ при всех $\lambda \in \Delta$. Последнее как раз и означает, что при любом выборе значения $\lambda \in \Delta$ операторы $\tilde{S}(\lambda)$ и $S(\lambda)$ представляют собой вполне непрерывные возмущения некоторого равномерно положительного оператора. \square

3.2. Пусть $\zeta \in \varrho(T_{22}^\bullet)$ — имеющее конечную кратность изолированное собственное значение оператора T^\bullet . Пусть также для некоторого $\zeta^+ > \zeta$ справедливо соотношение $(\zeta, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T_{22}^\bullet)$, причём оператор $S(\zeta^+)$ представляет собой вполне непрерывное

возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора. Тогда найдётся такое $\zeta^- < \zeta$, что справедливо соотношение $[\zeta^-, \zeta) \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T_{22}^\bullet)$, а оператор $S(\zeta^-)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора.

Доказательство предложения 3.2 полностью аналогично доказательству предложения 3.1.

3.3. Пусть все расположенные на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^\bullet)$ точки спектра оператора T^\bullet являются изолированными собственными значениями конечной кратности. Пусть также оператор $S(\zeta^-)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда оператор $S(\zeta^+)$ также представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора.

3.4. Пусть все расположенные на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^\bullet)$ точки спектра оператора T^\bullet являются изолированными собственными значениями конечной кратности. Пусть также оператор $S(\zeta^+)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора. Тогда оператор $S(\zeta^-)$ также представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора.

Два последних предложения легко выводятся из предложений 3.1 и 3.2 индукцией по числу лежащих на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+]$ собственных значений оператора T^\bullet .

4. Связь результатов настоящего параграфа с результатами работы [1] устанавливается следующим образом.

Обозначим через λ_e точную нижнюю грань пересечения существенного спектра оператора T^\bullet с некоторой полупрямой $(\zeta, +\infty) \subseteq \varrho(T_{22}^\bullet)$, где $\zeta \in \varrho(T^\bullet)$. В качестве точной нижней грани пустого множества здесь и далее понимается величина $+\infty$. Обозначим также через $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ последовательность, членами которой выступают либо $(n+1)$ -ые снизу (с учётом кратности) собственные значения оператора T^\bullet из интервала (ζ, λ_e) , либо величина λ_e , если требуемое собственное значение не существует. Имеет место следующий тривиальным образом вытекающий из результатов настоящего параграфа факт.

4.1. Пусть величина $\text{ind } S(\zeta)$ конечна. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\lambda_n = \inf\{\lambda \in (\zeta, +\infty) : \text{ind } S(\lambda) > \text{ind } S(\zeta) + n\}.$$

Основные результаты работы [1] получаются комбинированием предложений 4.1 и § 3.3.1.

§ 5. Дополнительные иллюстрации

1. Несложно заметить, что для получения основных результатов пункта § 3.2 полуограниченность оператора T_{11}° в действительности не является необходимой. Достаточным оказывается выполнение следующих двух условий:

1°. Существуют величины $\varkappa, \tau \in \mathbb{R}$, для которых квадратичная форма

$$\mathfrak{s}[y] \rightleftharpoons \langle (T_{11}^\circ - \varkappa)y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1} + \langle (\tau - T_{22}^\bullet)^{-1} T_{21}^\circ y, T_{21}^\circ y \rangle_{\mathfrak{H}_2}$$

равномерно по \mathfrak{H}_1 -норме знакоопределена на линейном множестве $\text{dom } T_{11}^\circ$.

2°. При выборе в качестве пространства \mathfrak{D}_1 пополнения линейного множества $\text{dom } T_{11}^\circ$ по норме $|\mathfrak{s}[y]|^{1/2}$ замыканием оператора $I^*T^\circ I$ является некоторый всюду определённый ограниченный оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$.

В качестве примера здесь может быть рассмотрена действующая в пространстве $L_2[0, 1] \oplus L_2[0, 1]$ самосопряжённая операторная матрица

$$\begin{pmatrix} id/dx & -d/dx \\ d/dx & 0 \end{pmatrix}$$

с областью определения $\tilde{W}_2^1[0, 1] \oplus \tilde{W}_2^1[0, 1]$, где снова использовано обозначение § 2.2 (1). На роль пространств \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 могут быть взяты пространства $\tilde{W}_2^1[0, 1]$ и $L_2[0, 1]$, соответственно. Аналогичными проведённым в пункте § 3.2 рассуждениями легко устанавливается, что сосредоточенный на $\varrho(T_{22}^\bullet) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ спектр рассматриваемой матрицы совпадает со спектром граничной задачи

$$\begin{aligned} -y'' + i\lambda y' - \lambda^2 &= 0, \\ y(0) - y(1) &= y'(0) - y'(1) = 0. \end{aligned}$$

2. Результаты предыдущего параграфа были сформулированы применительно к задаче о спектре простейшего линейного пучка $T^\bullet - \lambda$. Между тем, как несложно заметить, они допускают естественное распространение на случай самосопряжённой оператор-функции достаточно общего вида. А именно, пусть $T: [\zeta^-, \zeta^+] \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{A})$ есть гладкая в смысле сильной операторной топологии оператор-функция, для которой при любом выборе значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ соответствующий оператор $[T(\lambda)]^\bullet$ самосопряжён. Пусть при этом также выполнены следующие два условия:

1°. Существует вещественное число $\varepsilon > 0$, для которого независимо от выбора значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ правая нижняя компонента $T_{22}(\lambda)$ операторной матрицы $T(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$(\forall y \in \mathfrak{D}_2) \quad \langle T_{22}(\lambda)y, y \rangle \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathfrak{D}_2}^2.$$

2°. Определённая на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+]$ оператор-функция S вида

$$S(\lambda) \Rightarrow T_{11}(\lambda) - T_{12}(\lambda)[T_{22}(\lambda)]^{-1}T_{21}(\lambda)$$

непрерывна в смысле равномерной операторной топологии, а её значения суть вполне непрерывные возмущения некоторых равномерно положительных операторов.

Во избежание недоразумений подчеркнём, что норма пространств \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 здесь уже не предполагается каким-либо образом связанной с соотношениями из пункта § 3.2.

Напомним [8, 6], что собственное значение $\mu \in (\zeta^-, \zeta^+)$ самосопряжённой оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ считается *имеющим отрицательный тип*, если для любого ненулевого вектора $y \in \ker[T(\mu)]^\bullet$ числовая функция $\lambda \mapsto \langle [T(\lambda)]^\bullet y, y \rangle_{\mathfrak{H}}$ определена на некотором содержащем точку μ интервале и имеет в этой точке строго отрицательную производную. При сделанных предположениях имеют место следующие два факта.

2.1. Каждое имеющее отрицательный тип изолированное конечнократное собственное значение $\mu \in (\zeta^-, \zeta^+)$ оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ является имеющим отрицательный тип изолированным собственным значением той же кратности для передаточной оператор-функции S .

Доказательство. При сделанных предположениях из теоремы Банаха–Штейнгауза [7, п. 11.5] вытекает равномерная по параметру $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ ограниченность операторов $T(\lambda)$ и связанная с этим возможность дифференцирования оператор-функции S в смысле сильной операторной топологии. Согласно предложению § 3.2.2 и замечаниям из пункта 1, точка μ является изолированным собственным значением оператор-функции S , причём соответствующее собственное подпространство допускает [§ 2.1.4] представление

$$\left\{ y \in \mathfrak{D}_1 : I \begin{pmatrix} y \\ z_\mu \end{pmatrix} \in \ker[T(\mu)]^\bullet \right\},$$

где использовано сокращение $z_\lambda \rightleftharpoons -[T_{22}(\lambda)]^{-1}T_{21}(\lambda)y$. Учёт выполняющихся для любого вектора $y \in \ker S(\mu)$ равенств

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\langle S(\lambda)y, y \rangle}{d\lambda} \right|_{\lambda=\mu} &= \left. \frac{d\langle S(\lambda)y, y \rangle}{d\lambda} \right|_{\lambda=\mu} - 2 \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} S(\mu) & 0 \\ 0 & T_{22}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (dz_\lambda/d\lambda)|_{\lambda=\mu} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} \left\langle \begin{pmatrix} S(\lambda) & 0 \\ 0 & T_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z_\mu - z_\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z_\mu - z_\lambda \end{pmatrix} \right\rangle \right|_{\lambda=\mu} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} \left\langle [T(\lambda)]^\bullet I \begin{pmatrix} y \\ z_\mu \end{pmatrix}, I \begin{pmatrix} y \\ z_\mu \end{pmatrix} \right\rangle \right|_{\mathfrak{H}} \Big|_{\lambda=\mu} \end{aligned}$$

завершает доказательство. □

2.2. Пусть все расположенные на интервале (ζ^-, ζ^+) собственные значения оператор-функции T имеют отрицательный тип, а каждый из операторов $T(\zeta^\pm)$ обладает ограниченным обратным. Тогда спектр оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ на интервале (ζ^-, ζ^+) чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине $\operatorname{ind} S(\zeta^+) - \operatorname{ind} S(\zeta^-)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mu \in \mathbb{R}$ и рассмотрим определённую на некотором содержащем эту точку интервале гладкую оператор-функцию F вида

$$F(\lambda) \rightleftharpoons \begin{pmatrix} F_{11}(\lambda) & F_{12}(\lambda) \\ F_{21}(\lambda) & F_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

значениями которой выступают ограниченные самосопряжённые операторы в ортогональной прямой сумме $\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ некоторых конечномерных гильбертовых пространств. Предположим также выполнение равенств $F_{11}(\mu) = 0$, $F_{21}(\mu) = 0$ и обратимость операторов $F'_{11}(\mu)$ и $F_{22}(\mu)$. Тогда при $\lambda \rightarrow \mu + 0$ оказываются справедливыми асимптотики

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} F(\lambda) &= \operatorname{ind} F_{11}(\lambda) + \operatorname{ind}[F_{22}(\lambda) - F_{21}(\lambda)F_{11}^{-1}(\lambda)F_{12}(\lambda)] \\ &= \operatorname{ind}[(\lambda - \mu) \cdot (F'_{11}(\mu) + o(1))] + \operatorname{ind}[F_{22}(\mu) + O(\lambda - \mu)] \\ &= \operatorname{ind} F'_{11}(\mu) + \operatorname{ind} F(\mu). \end{aligned}$$

Повторим теперь в основном рассуждения из доказательства предложения § 4.2.1. А именно, сопоставим оператор-функции S последовательность непрерывных числовых функций $\Lambda_n: [\zeta^-, \zeta^+] \rightarrow \mathbb{R}$. Применяя полученную асимптотику индексов инерции к случаю, когда пространство \mathfrak{E}_1 представляет собой ядро оператора $S(\mu)$, пространство \mathfrak{E}_2 — отвечающее отрицательной части спектра инвариантное подпространство того же оператора, а квадратичные формы операторов $F(\lambda)$ совпадают с таковыми для операторов $S(\lambda)$, убеждаемся, что каждая из функций Λ_n строго убывает в своих нулях. Согласно предложению § 3.2.2 и замечаниям из пункта 1, это означает совпадение суммарной кратности расположенного на интервале (ζ^-, ζ^+) спектра оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ с величиной § 4.2 (2). \square

Литература

- [1] M. Kraus, M. Langer, C. Tretter. *Variational principles and eigenvalue estimates for unbounded block operator matrices and applications* // Journ. of Comput. and Appl. Math. — 2004. — V. 171. — P. 311–334.
- [2] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М.: Мир, 1971.
- [3] Ф. А. Березин, М. А. Шубин. *Уравнение Шрёдингера*. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [4] Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Мир, 1972.
- [5] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. М.: Наука, 1966.
- [6] А. А. Владимиров. *Оценки числа собственных значений самосопряжённых оператор-функций* // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 6. — С. 838–847.
- [7] В. А. Треногин. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.
- [8] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye. *Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space* // Integr. Equat. Oper. Th. — 1993. — V. 17. — P. 338–360.
- [9] H. Langer, M. Langer, C. Tretter. *Variational principles for eigenvalues of block operator matrices* // Indiana Univ. Math. Jour. — 2002. — V. 51, № 6. — P. 1427–1459.